



§ 4.5 等价关系与划分

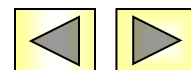
等价关系： A 上的关系 R 是自反的、对称的和传递的，
则称 R 为等价关系。

若 $\langle x, y \rangle \in$ 等价关系 R ，则记作 $x \sim y$ 。

如例8：设 $A = \{ 1, 2, \dots, 10 \}$ ，对于 A 上的关系

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid (x - y)/3 \in \mathbb{Z} \}$$

由 R 具有自反性、对称性和传递性，知 R 是等价关系，
且 $1 \sim 4 \sim 7 \sim 10$ ， $2 \sim 5 \sim 8$ ， $3 \sim 6 \sim 9$



§ 4.5 等价关系与划分

等价类： 设 R 是 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$ ，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \},$$

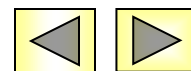
则称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类。

简称为 x 的等价类。简记为 $[x]$

于是例8有 $[1] = [4] = [7] = [10] = \{1, 4, 7, 10\}$,

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$

$$[3] = [6] = [9] = \{3, 6, 9\}$$





§ 4.5 等价关系与划分

等价类的性质：设 R 是 A 上的等价关系，

对任意 $x, y \in A$ ，下列结论成立：

- (1) $[x] \neq \emptyset$ ，且 $[x] \subseteq A$ ；
- (2) 若 xRy ，则 $[x] = [y]$ ；
- (3) 若 $x \not R y$ ，则 $[x] \cap [y] = \emptyset$ ；
- (4) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$ 。



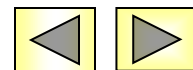
§ 4.5 等价关系与划分

集 A 在等价关系 R 下的商集:

设 R 是 A 上的等价关系, 以 R 的不交的等价类为元素的集合叫作 A 在 R 下的商集, 记作 A/R ,

$$\text{即 } A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

于是例8中 $A/R = \{ \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\} \}$



§ 4.5 等价关系与划分

集合 A 的划分:

设 A 是非空集合, 如果存在一个 A 的子集族 $\pi (\pi \subseteq P(A))$, 满足以下条件:

- (1) $\emptyset \notin \pi$;
- (2) π 中任意两个元素不交;
- (3) π 中所有元素的并集等于 A ;

则称 π 为 A 的一个划分, 且称 π 中的元素为划分块。



§ 4.5 等价关系与划分

例11：设 $A = \{a, b, c, d\}$ ，判断下列哪些集合是 A 的划分。

(1) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

是

(2) $\{\{a, b, c, d\}\}$

是

(3) $\{\{a, b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$

不是

(4) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

不是

(5) $\{\{a, b\}, \{c\}\}$

不是





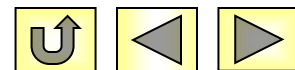
§ 4.5 等价关系与划分

等价关系与划分：

A 在等价关系 R 下的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所诱导的划分。

对于 A 上给定的任意划分 π ，定义 A 上二元关系 R 为：对任何元素 $x, y \in A$ ，若 x 和 y 在同一划分块中，则 xRy 。于是 R 是 A 上的等价关系，称为由划分 π 所诱导的等价关系，且商集 A/R 就等于 π 。

集合 A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的。





§ 4.5 等价关系与划分

例12：设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，求出 A 上所有的等价关系。

解：先求 A 的各种划分：只有1个划分块的划分 π_1 ，

具有2个划分块的划分 π_2, π_3, π_4 ，

具有3个划分块的划分 π_5 。

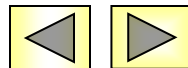
于是 $\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$ ，

$\pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ，

$\pi_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ ，

$\pi_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ，

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$



§ 4.5 等价关系与划分

例12：设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，求出 A 上所有的等价关系。

设对应于划分 π_i 的等价关系为 R_i ，则

$$\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \pi_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ \pi_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$R_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \\ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$R_3 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$R_4 = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$$

$$R_5 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

